A matematika legszebb kihívásai

Szegedy Balázs, MTA Rényi intézet

2018. február 21.

Matematika és szépség

Mi a matematika?

Mi a matematika? A matematika azon állítások gyüjteménye amelyek univerzálisan igazak és reprodukálhatóak.

Matematika és szépség

Mi a matematika? A matematika azon állítások gyüjteménye amelyek univerzálisan igazak és reprodukálhatóak. Mikor született Julius Cézár? hány bordája van egy embernek? Egybe írják-e hogy Székelyudvarhely? Ezek az igazsagok elérhetetlenek egy messzi-messzi galaxisban.

Matematika és szépség

Mi a matematika? A matematika azon állítások gyüjteménye amelyek univerzálisan igazak és reprodukálhatóak. Mikor született Julius Cézár? hány bordája van egy embernek? Egybe írják-e hogy Székelyudvarhely? Ezek az igazsagok elérhetetlenek egy messzi-messzi galaxisban. A matematika azonban mindent áthat.

Matematika és szépség

Mi a matematika? A matematika azon állítások gyüjteménye amelyek univerzálisan igazak és reprodukálhatóak. Mikor született Julius Cézár? hány bordája van egy embernek? Egybe írják-e hogy Székelyudvarhely? Ezek az igazsagok elérhetetlenek egy messzi-messzi galaxisban. A matematika azonban mindent áthat.

A Pitagorasz tétel vagy a $3 \times 4 = 12$ igazsága viszonlag könnyen elérhető bárhol közepesen intelligens lények számára.

Ez az univerzalitás sok matematikusban kelt egy fajta vallásos érzületet, hiszen úgy tünhet hogy az örökkévalóságba leskelődhetünk be.

Ez az univerzalitás sok matematikusban kelt egy fajta vallásos érzületet, hiszen úgy tünhet hogy az örökkévalóságba leskelődhetünk be. Részben ez adja a matematika szépségét is.

Szintaktika és szemantika: A matematikának van egy nyelve (szintaktika) es jelentés tartalma (szemantika).

Ez az univerzalitás sok matematikusban kelt egy fajta vallásos érzületet, hiszen úgy tünhet hogy az örökkévalóságba leskelődhetünk be. Részben ez adja a matematika szépségét is.

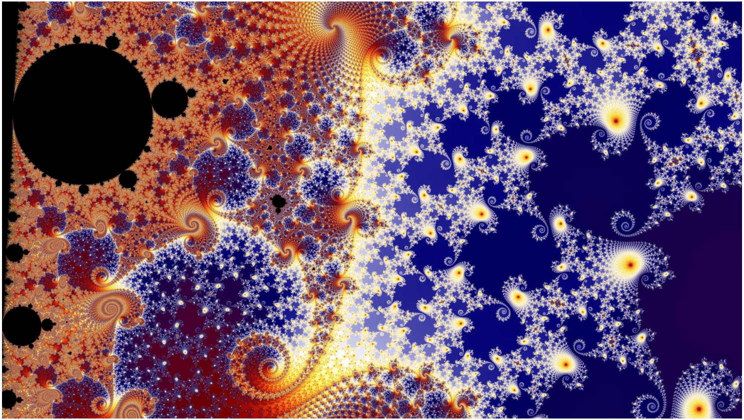
Szintaktika és szemantika: A matematikának van egy nyelve (szintaktika) es jelentés tartalma (szemantika). Ha csak a nyelvet tekintjük akkor persze rondának tűnhet hiszen a szépség a jelentésben van.

If $\eta \in \hom(K_n, \mathcal{D}_{n-k-1}(\widehat{Z_k}))$, then by Lemma 23 the function

$$\prod_{v \in K_n} \mathcal{C}^{|v|}(\alpha_v \phi_v) \circ p_v$$

factors through $\pi^{K_n}_{k,k-1}$, so there is $g : X^{K_n}_{k-1} \to \mathbb{C}$ such that $\prod_{v\in K_n} \mathcal{C}^{|v|}(\alpha_v \phi_v) \circ p_v$ $= g \circ \pi^{K_n}_{k,k-1}$. The desired equality (43) becomes $\int_{Q_k} g \circ \pi^{K_n}_{k,k-1} \,\mathrm{d}\nu_k =$ $\int_{\Omega^{K_n}} g \circ \pi^{K_n}_{k,k-1} \circ \gamma^{K_n}_k \,\mathrm{d}\mu$, which is equivalent to $\int_{Q_{k-1}} g \,\mathrm{d}\nu_{k-1} = \int_{\Omega^{K_n}} g \circ \gamma^{K_n}_{k-1} \,\mathrm{d}\mu$, where ν_{k-1} is the Haar measure on $Q_{k-1} = \pi^{K_n}_{k,k-1}(Q_k)$. The latter equality of integrals holds by induction on k.

A matematika jelentése



A matematizálás folyamata

Általános jelenség (nem csak matek!) $\rightarrow$ Matematikai elmélet

mennyiség, műveletek $\rightarrow$ számtan, algebra

tér $\rightarrow$ mértan, differenciál geometria, topológia

véletlen $\rightarrow$ valószínűségszámítás

szimmetria $\rightarrow$ csoport elmélet

rendezettség, rendezettlenség $\rightarrow$ információ elmélet

hálózatok $\rightarrow$ gráf elmélet

változás $\rightarrow$ differenciál egyenletek, dinamikus rendszerek elmélete, káosz elmélet

lényeg látás $\rightarrow$ gépi tanulás, neurális hálózatok

A matematizálás folyamata

A matematikában minnél többet tudunk annál többet nem tudunk

A matematikában minnél többet tudunk annál többet nem tudunk... illetve annál több mindenről tudjuk hogy nem tudjuk.

A matematizálás folyamata

A matematikában minnél többet tudunk annál többet nem tudunk... illetve annál több mindenről tudjuk hogy nem tudjuk. Ahogy tágúl a horizontunk úgy nő a horizont is. Jelen korban több kihívás elé néz a matematika mint 3000 éve.

A matematizálás folyamata

A matematikában minnél többet tudunk annál többet nem tudunk... illetve annál több mindenről tudjuk hogy nem tudjuk. Ahogy tágúl a horizontunk úgy nő a horizont is. Jelen korban több kihívás elé néz a matematika mint 3000 éve. Több adat van, bonyolultabb a világ, más tudományok is fejlődtek és azoknak is be kell segíteni.

Negatív számból nem lehet gyököt vonni

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében.

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében. Vezessük be hogy $i = \sqrt{-1}$.

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében. Vezessük be hogy $i = \sqrt{-1}$. Komplex szám: $a + b \cdot i$ ahol a és b vaós számok. Például: $2 + 3 \cdot i$ vagy $1 - i$ vagy $4 + 0 \cdot i = 4$.

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében. Vezessük be hogy $i = \sqrt{-1}$. Komplex szám: $a + b \cdot i$ ahol a és b vaós számok. Például: $2 + 3 \cdot i$ vagy $1 - i$ vagy $4 + 0 \cdot i = 4$. A valós számok a számegyenesen helyezkednek el de a komplex számokat két koordináta határozza meg így azok egy sík pontjaiként képzelhetőek el. Ezt hívjuk Komplex számsíknak.

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében. Vezessük be hogy $i = \sqrt{-1}$. Komplex szám: $a + b \cdot i$ ahol a és b vaós számok. Például: $2 + 3 \cdot i$ vagy $1 - i$ vagy $4 + 0 \cdot i = 4$. A valós számok a számegyenesen helyezkednek el de a komplex számokat két koordináta határozza meg így azok egy sík pontjaiként képzelhetőek el. Ezt hívjuk Komplex számsíknak. Miért hívjuk ezeket a furcsa dolgokat egyáltalan számnak? Meg lehet velük számolni valamit?

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében. Vezessük be hogy $i = \sqrt{-1}$. Komplex szám: $a + b \cdot i$ ahol a és b vaós számok. Például: $2 + 3 \cdot i$ vagy $1 - i$ vagy $4 + 0 \cdot i = 4$. A valós számok a számegyenesen helyezkednek el de a komplex számokat két koordináta határozza meg így azok egy sík pontjaiként képzelhetőek el. Ezt hívjuk Komplex számsíknak. Miért hívjuk ezeket a furcsa dolgokat egyáltalan számnak? Meg lehet velük számolni valamit? ...Már a negatív számoknál is rezeg a léc hogy jogos-e őket számnak hívni. Részben az motiválja őket hogy a kivonást gond nélkűl el tudjuk végezni. Most azonban a gyökvonást is gond nélkűl akarjuk végezni.

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Negatív számból nem lehet gyököt vonni .... legalábbis a valós számok körében. Vezessük be hogy $i = \sqrt{-1}$. Komplex szám: $a + b \cdot i$ ahol a és b vaós számok. Például: $2 + 3 \cdot i$ vagy $1 - i$ vagy $4 + 0 \cdot i = 4$. A valós számok a számegyenesen helyezkednek el de a komplex számokat két koordináta határozza meg így azok egy sík pontjaiként képzelhetőek el. Ezt hívjuk Komplex számsíknak. Miért hívjuk ezeket a furcsa dolgokat egyáltalan számnak? Meg lehet velük számolni valamit? ...Már a negatív számoknál is rezeg a léc hogy jogos-e őket számnak hívni. Részben az motiválja őket hogy a kivonást gond nélkűl el tudjuk végezni. Most azonban a gyökvonást is gond nélkűl akarjuk végezni. Jó hír: a komplex számok körében nagyon sok művelet gond nélkűl elvégezhető. Minden szempontból számként viselkednek. A komplex számokat lehet összeadni, kivonni, szorozni, összeadni, hatványozni. Minden komplex számból lehet gyököt vonni. Pl: $\sqrt{i} = 1/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2}) \cdot i$.

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Egy kivételesen szép egyenlet:

$$e^{i\pi} = -1$$

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Egy kivételesen szép egyenlet:

$$e^{i\pi} = -1$$

A Mandelbrot féle fraktálok is eredendően a komplex számsíkon élnek.

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Egy kivételesen szép egyenlet:

$$e^{i\pi} = -1$$

A Mandelbrot féle fraktálok is eredendően a komplex számsíkon élnek. A komplex számok forradalmasították a matematika majdnem minden területét és sok dolognak a mélyebb, egységesebb megértéséhez vezettek.

A komplex (képzetes) számok csodálatos világa

Egy kivételesen szép egyenlet:

$$e^{i\pi} = -1$$

A Mandelbrot féle fraktálok is eredendően a komplex számsíkon élnek. A komplex számok forradalmasították a matematika majdnem minden területét és sok dolognak a mélyebb, egységesebb megértéséhez vezettek. Egy erdekesség hogy az exponenciális változást és a periódikus változást egy nyelven lehet kezelni a komplex számok segítségével. A matematikai szépség gyakori forrása az amikor kiderűl hogy sok kulömbözőnek tűnő dolog egyetlen dolog külömböző megnyilvánulásai.

Egy kivételesen szép egyenlet:

$$e^{i\pi} = -1$$

A Mandelbrot féle fraktálok is eredendően a komplex számsíkon élnek. A komplex számok forradalmasították a matematika majdnem minden területét és sok dolognak a mélyebb, egységesebb megértéséhez vezettek. Egy erdekesség hogy az exponenciális változást és a periódikus változást egy nyelven lehet kezelni a komplex számok segítségével. A matematikai szépség gyakori forrása az amikor kiderűl hogy sok kulömbözőnek tűnő dolog egyetlen dolog külömböző megnyilvánulásai. Furcsa és nem teljesen megértett dolog a következő: A mikroszkopikus világ fizikájában, a kvantum mechanikában a komplex számok fontos szerephez jutnak. Úgy tűnik hogy a természet is szereti és használja a komplex számokat.

Riemann hipotézis. Az egyik legnagyobb megoldatlan probléma

Az 1800-as években vezette be Riemann a következő függvényt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Például: $\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \pi^2/6$

Egy misztikus egyenlet: $\zeta(-1) = -1/12$ ez azt jelenti hogy $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ igaz valamilyen furcsa értelemben. Ez a matematikai összefüggés a fizikában is előjön.

Riemann hipotézis. Az egyik legnagyobb megoldatlan probléma

Az 1800-as években vezette be Riemann a következő függvényt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Például: $\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \pi^2/6$

Egy misztikus egyenlet: $\zeta(-1) = -1/12$ ez azt jelenti hogy $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$ igaz valamilyen furcsa értelemben. Ez a matematikai összefüggés a fizikában is előjön.

Riemann hipotézis. Az egyik legnagyobb megoldatlan probléma

Az 1800-as években vezette be Riemann a következő függvényt:

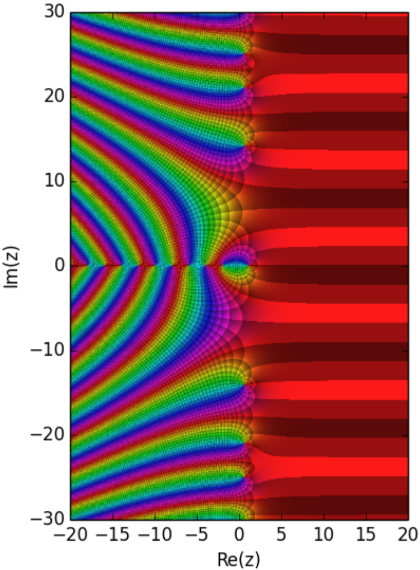
$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Például: $\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \pi^2/6$

Egy misztikus egyenlet: $\zeta(-1) = -1/12$ ez azt jelenti hogy $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ igaz valamilyen furcsa értelemben. Ez a matematikai összefüggés a fizikában is előjön.

Egészen zseniális módon, Riemann kapcsolatba hozta a ζ (zeta) függvényt a prímszámok viselkedésével. Ehhez az is kellett hogy a *zeta* függvényt ki lehessen számolni komplex számokon is ami szerencsére lehetséges.

Riemann hipotézis. Az egyik legnagyobb megoldatlan probléma



Riemann hipotézis. Az egyik legnagyobb megoldatlan probléma

Riemann sejtés: A ζ függvény 0-helyei az $1/2$ valós részű egyenesen helyezkednek el a komplex számsíkon.

Riemann hipotézis. Az egyik legnagyobb megoldatlan probléma

Riemann sejtés: A ζ függvény 0-helyei az $1/2$ valós részű egyenesen helyezkednek el a komplex számsíkon.

A Riemann sejtés megoldásáért egymillió dollár a jutalom. Nagyon sokan probálkoztak, de eddig nem jutottak közel. Valószínűleg olyan forradalmian új ötletekre van szűkség amelyek sok területen hasznosak lennének.

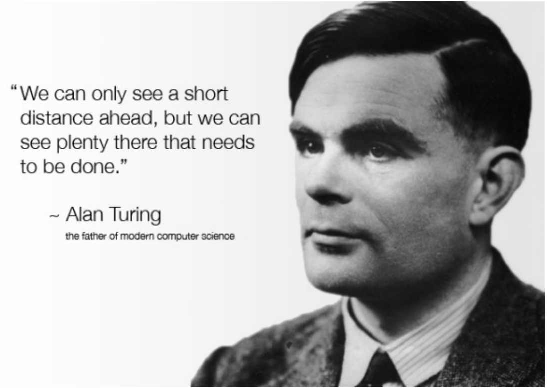
A számítógépek megjelenésével érdekessé vált az a kérdés hogy milyen problémát mennyire bonyolult megoldani számítogépes algoritmussal az az mennyi időt igényel a számítogépen.

A számítógépek megjelenésével érdekessé vált az a kérdés hogy milyen problémát mennyire bonyolult megoldani számítogépes algoritmussal az az mennyi időt igényel a számítogépen. Az időt itt nem fizikai időben mérjük hanem "lépés számban".

A bonyolultság elmélete

A számítógépek megjelenésével érdekessé vált az a kérdés hogy milyen problémát mennyire bonyolult megoldani számítogépes algoritmussal az az mennyi időt igényel a számítogépen. Az időt itt nem fizikai időben mérjük hanem "lépés számban". Pédául számokat szorozni gyorsan lehet, azonban primfelbontást számolni nehéz feladatnak tűnik. Egy teljes matematikai ágazat alkult ki amelynek keretében precízen lehet ezeket a kérdéseket tanúlmányozni. Ezt hívják bonyolultság elméletnek.

A bonyolultság elmélet egyik megalapozója, Alan Turing. Az enigma kód feltörésében is részt vett és nemrég játék filmet készítettek róla imitation game cimmel amelyben Benedict Cumberbatch játsza.



A bonyolultság elmélete

Sok évtized munkája oda vezetett hogy rengeteg érdekes feladat megoldására van gyors algoritmus. Ez alatt gyakran azt értik hogy a bemenet bitjeinek számának egy adott hatványával becsülhető a futási idő. Ezeket hívják polinómiális algoritmusoknak.

Sok évtized munkája oda vezetett hogy rengeteg érdekes feladat megoldására van gyors algoritmus. Ez alatt gyakran azt értik hogy a bemenet bitjeinek számának egy adott hatványával becsülhető a futási idő. Ezeket hívják polinómiális algoritmusoknak. Sajnos sokkal kevesebb eredmeny van arrol hogy mi az amire nincs gyors (polinómiális) algoritmus. (Ezt a titkosítási eljárások miatt is fontos lenne tudni.) Hogyan lehet egyáltalán bebizonyítani hogy valamire nincs gyors algoritmus? Itt viszonylag szerény a tudásunk.

Sok évtized munkája oda vezetett hogy rengeteg érdekes feladat megoldására van gyors algoritmus. Ez alatt gyakran azt értik hogy a bemenet bitjeinek számának egy adott hatványával becsülhető a futási idő. Ezeket hívják polinómiális algoritmusoknak. Sajnos sokkal kevesebb eredmeny van arrol hogy mi az amire nincs gyors (polinómiális) algoritmus. (Ezt a titkosítási eljárások miatt is fontos lenne tudni.) Hogyan lehet egyáltalán bebizonyítani hogy valamire nincs gyors algoritmus? Itt viszonylag szerény a tudásunk. Felfedezték hogy problémáknak egy nagy és természetes családja azonos bonyolultsági osztályba esik (NP) azoban nem tudjuk hogy ezek a problémák polinómiálisak vagy sem.

A bonyolultság elmélete

Sok évtized munkája oda vezetett hogy rengeteg érdekes feladat megoldására van gyors algoritmus. Ez alatt gyakran azt értik hogy a bemenet bitjeinek számának egy adott hatványával becsülhető a futási idő. Ezeket hívják polinómiális algoritmusoknak. Sajnos sokkal kevesebb eredmeny van arrol hogy mi az amire nincs gyors (polinómiális) algoritmus. (Ezt a titkosítási eljárások miatt is fontos lenne tudni.) Hogyan lehet egyáltalán bebizonyítani hogy valamire nincs gyors algoritmus? Itt viszonylag szerény a tudásunk. Felfedezték hogy problémáknak egy nagy és természetes családja azonos bonyolultsági osztályba esik (NP) azoban nem tudjuk hogy ezek a problémák polinómiálisak vagy sem. A fő kérdés így szól rïviden:

P=NP?

Mindenki azt sejti hogy nem egyenlő ami jó hír lenne a titkosítások biztonságára is. Ezért is egy millió dollár jár.

Távolabbi kihívások

Oriási mennyiségű adattal állunk szemben. Szükség van arra hogy a lényeget ebből ki tudjuk szűrni.

Távolabbi kihívások

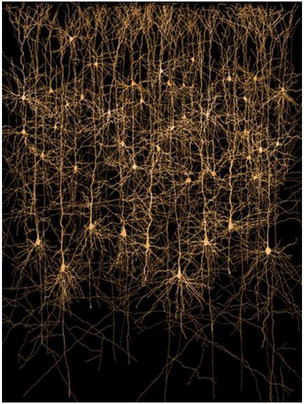
Oriási mennyiségű adattal állunk szemben. Szükség van arra hogy a lényeget ebből ki tudjuk szűrni. A nagy hálózatok elmélete, amely az utóbbi évtizedekben indúlt fejlődésnek ebbe az irányba megy. A mesteréges intelligencia és azon belűl a neurális hálózatok kutatása is ezt a problémát kívánja kezelni.

Távolabbi kihívások

Oriási mennyiségű adattal állunk szemben. Szükség van arra hogy a lényeget ebből ki tudjuk szűrni. A nagy hálózatok elmélete, amely az utóbbi évtizedekben indúlt fejlődésnek ebbe az irányba megy. A mesteréges intelligencia és azon belűl a neurális hálózatok kutatása is ezt a problémát kívánja kezelni. Keressük a lényglátás matematikáját.

Távolabbi kihívások

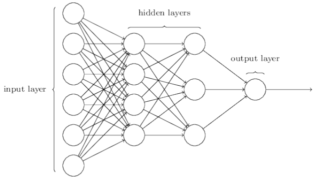
Oriási mennyiségű adattal állunk szemben. Szükség van arra hogy a lényeget ebből ki tudjuk szűrni. A nagy hálózatok elmélete, amely az utóbbi évtizedekben indúlt fejlődésnek ebbe az irányba megy. A mesterséges intelligencia és azon belűl a neurális hálózatok kutatása is ezt a problémát kívánja kezelni. Keressük a lényglátás matematikáját. Az emberi agy működése sok jó ötlethez jutatta a matematikusokat, de még rengeteg a tennivaló. Nincs egy egységes elmélet.



Mesterséges neurális hálózatok

Idegrendszer idealizált, egyszerűsített modelje. Minden neuron egy fix nem-lineáris függvényt (amit g-vel jelölünk) alkalmaz a bemenetek egy lineáris kombinációjára.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := g(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i).$$



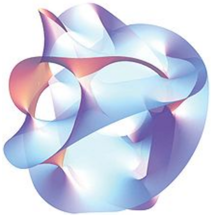
A tréning folyamat alatt a w_i "súlyok" változnak.

A világmindenség végső egyesített elmélete

Sok fizikus valami ilyesmit keres.

A világmindenség végső egyesített elmélete

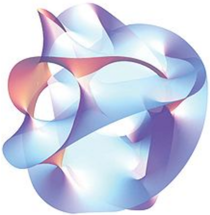
Sok fizikus valami ilyesmit keres. Az egyik leg esélyesebb jelölt a húrelmélet.



"Minden geometria"

A világmindenség végső egyesített elmélete

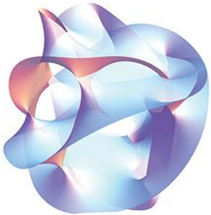
Sok fizikus valami ilyesmit keres. Az egyik leg esélyesebb jelölt a húrelmélet.



"Minden geometria" A húr elmélet nagyon bonyolult matematikára épűl. Ezen a fronton már nincs éles határvonal matematika és fizika közt.

A világmindenség végső egyesített elmélete

Sok fizikus valami ilyesmit keres. Az egyik leg esélyesebb jelölt a húrelmélet.



"Minden geometria" A húr elmélet nagyon bonyolult matematikára épűl. Ezen a fronton már nincs éles határvonal matematika és fizika közt. Valami nagy áttörés még hianyzik.